О ВЛИЯНИИ СДВИГА ФАЗ НА УХОДЫ ГИРОСКОПА ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

В. И. КЛИМЧУК

1. Изучение движения астатического гироскопа, установленного на неподвижном или подвижном (колеблющемся с малой амплитудой) основании, при наличии периодических моментов на осях подвеса приводит к исследованию таких систем дифференциальных уравнений в малых углах [2]:

а) неподвижное основание

$$\ddot{\alpha}_1 + \nu_2^2\dot{\beta}_1 = \sum_n a_n^{(2)}\cos\omega_n t + b_n^{(2)}\sin\omega_n t + \varepsilon f_2(\alpha_1,\ \beta_1,\ \dot{\alpha}_1,\ \dot{\beta}_1,\ \ddot{\alpha}_1,\ \ddot{\beta}_1,\ \varepsilon),$$

$$\ddot{\beta}_1 - \gamma_1^2\dot{\alpha}_1 = \sum_n a_n^{(1)}\cos\omega_n t + b_n^{(1)}\sin\omega_n t + \varepsilon f_1(\alpha_1,\ \beta_1,\ \dot{\alpha}_1,\ \dot{\beta}_1,\ \ddot{\alpha}_1,\ \ddot{\beta}_1,\ \varepsilon), \qquad (1)$$

$$H = \mathrm{const};$$

б) подвижное основание

$$\ddot{\alpha}_1 + \nu_2^2\dot{\beta}_1 = \sum_n a_n^{(2)}\cos\omega_n t + b_n^{(2)}\sin\omega_n t + \varepsilon f_2(\alpha_1,\ \beta_1,\ \dot{\alpha}_1,\ \dot{\beta}_1,\ \omega_n t,\ \varepsilon),$$

$$\ddot{\beta}_1 - \nu_1^2\dot{\alpha}_1 = \sum_n a_n^{(1)}\cos\omega_n t + b_n^{(1)}\sin\omega_n t + \varepsilon f_1(\alpha_1,\ \beta_1,\ \dot{\alpha}_1,\ \dot{\beta}_1,\ \omega_n t,\ \varepsilon), \qquad (2)$$

$$H = \mathrm{const},$$

где $\alpha = \varepsilon\alpha_1$ — угол поворота внешнего кольца, $\beta = \varepsilon\beta_1$ — угол поворота внутреннего кольца, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, H — кинетический момент ротора, остальные обозначения — в [2].

Решения этих систем в первом приближении ищем методом усреднения Н. Н. Боголюбова [1], что приводит к анализу следующей, однотипной для (1) и (2), системы дифференциальных уравнений в стандартной форме:

$$\begin{aligned}
\frac{d\overline{M}_1}{dt} &= \varepsilon \underset{t}{M}\left\{\frac{1}{\nu}F_1^{(0)}\cos\psi - \frac{1}{\nu_2^2}F_2^{(0)}\sin\psi\right\},\\
\frac{d\overline{N}_1}{dt} &= \varepsilon \underset{t}{M}\left\{\frac{1}{\nu_2^2}F_2^{(0)}\right\},\\
\frac{d\overline{N}_2}{dt} &= \varepsilon \underset{t}{M}\left\{-\frac{1}{\nu_1^2}F_1^{(0)}\right\},\\
\frac{d\overline{\Theta}}{dt} &= \varepsilon \underset{t}{M}\left\{-\frac{1}{\overline{M}_1\nu}F_1^{(0)}\sin\psi - \frac{1}{\overline{M}_1\nu_2^2}F_2^{(0)}\cos\psi\right\},
\end{aligned} \qquad (3)$$

где $\nu = \nu_1\cdot\nu_2$, $\psi = \nu t + \Theta$, а функции $F_1^{(0)}$, $F_2^{(0)}$ соответствуют функциям f_1 и f_2, в которых осуществлена определенная замена переменных [2] и $\varepsilon = 0$.

2. Если гироскоп установлен на неподвижном основании, на осях подвеса действуют моменты $M_{y_1} = \varepsilon k_1\sin\omega t$, $M_{x_2} = \varepsilon k_2\sin(\omega t + \varphi)$ и плоскости колец не взаимно перпендикулярны ($\beta_0 \neq 0$), то средняя скорость азимутального ухода увеличивается за счет «перекрестного» влияния моментов при $\varphi \neq 0$. Величина этой дополнительной скорости в первом приближении вычисляется по формуле [2]

$$\overline{\Delta\dot{\alpha}} = -\frac{\varepsilon^2 m_1 m_2}{2\nu_1^2\omega(\nu^2-\omega^2)^2}\left[2\omega^2\nu_2^2 L_1\sin 2\beta_0 + (\nu^2+\omega^2)L_2\right]\sin\varphi.$$

Если гироскоп установлен на основании, колеблющемся вокруг двух взаимно перпендикулярных осей по закону $\psi = \varepsilon a_1\sin\omega_1 t$, $\vartheta = \varepsilon a_2\sin(\omega_1 t + \gamma)$ и на осях подвеса имеются периодические возмущающие моменты $M_{y_1} = \varepsilon k_1 \sin(\omega t + \delta)$, $M_{x_2} = \varepsilon k_2 \sin \omega t$, то при взаимной перпендикулярности колец подвеса ($\beta_0 = 0$) обнаруживается уход гироскопа по углам α и β. Даже при отсутствии моментов на осях имеет место уход относительно оси внутреннего кольца подвеса со средней угловой скоростью

$$\bar{\dot{\beta}} = -\frac{\varepsilon^2 a_1 a_2 \omega_1^2}{2\nu_1^2}(L_3 - L_2)\cos\gamma.$$

При одночастотном возмущении ($\omega_1 = \omega$) возникают уходы относительно обеих осей подвеса [2]:

$$\bar{\dot{\alpha}} = -\frac{\varepsilon^2 a_1}{2\nu_1^2(\nu^2 - \omega^2)}[m_2(\nu_2^4 - L\omega^2) - m_1\omega(\nu_1^2 - L\nu_2^2)\sin\delta],$$

$$\bar{\dot{\beta}} = \frac{\varepsilon^2}{2\nu_2^2}\left[\frac{a_1 m_1}{\nu^2 - \omega^2}(L_2\omega^2 - \nu_2^4) - (L_3 - L_2)a_1 a_2 \omega^2\right]\cos\delta,$$

где

$$m_1 = \frac{k_1}{A + B_1}, \quad m_2 = \frac{k_2}{(A + A_1)\cos^2\beta_0 + C_1 \sin^2\beta_0 + A_2}.$$

В случае так называемой сильной коррекции, обеспечивающей перпендикулярность колец подвеса, высокочастотным колебанием основания можно ликвидировать азимутальный уход оси гироскопа. Однако учитывая в этом случае сдвиг фаз γ в колебаниях основания, можно доказать [2], что средняя скорость азимутального ухода равна

$$\bar{\dot{\alpha}} = -\frac{\varepsilon^2 a_1 a_2 \omega_1^3 L}{2\nu_1^4}\sin\gamma.$$

В работе [3] вычислена средняя скорость азимутального ухода для гироскопов специальной конструкции без учета моментов инерции колец подвеса. Вычислим среднюю скорость ухода с учетом моментов инерции колец. В этом случае при наличии сдвига фаз γ в колебании основания функция f_1 будет со средним «довеском»

$$\Delta f_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{h_3' a_1 a_2 \omega_1}{\nu^2 - \omega^2}(\nu_1^4 - L\omega_1^2)\sin\gamma,$$

что вызывает уход со средней скоростью

$$\bar{\dot{\alpha}} = -\frac{\varepsilon^2 a_1 a_2 \omega_1 h_3'}{\nu_1^2(\nu^2 - \omega_1^2)}(\nu_1^4 - L\omega_1^2)\sin\gamma,$$

где

$$h_3' = \frac{h_3}{A + A_1 + A_2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, М., 1963.
2. Климчук В. И. Метод усреднения Н. Н. Боголюбова в применении к исследованию динамики гироскопа в кардановом подвесе при периодических возмущениях. Автореферат кандидатской диссертации. К., 1966.
3. Климов Д. М., Потапенко В. А. К уходам гироскопа в кардановом подвесе на подвижном основании.— МТТ, 1966, 1.